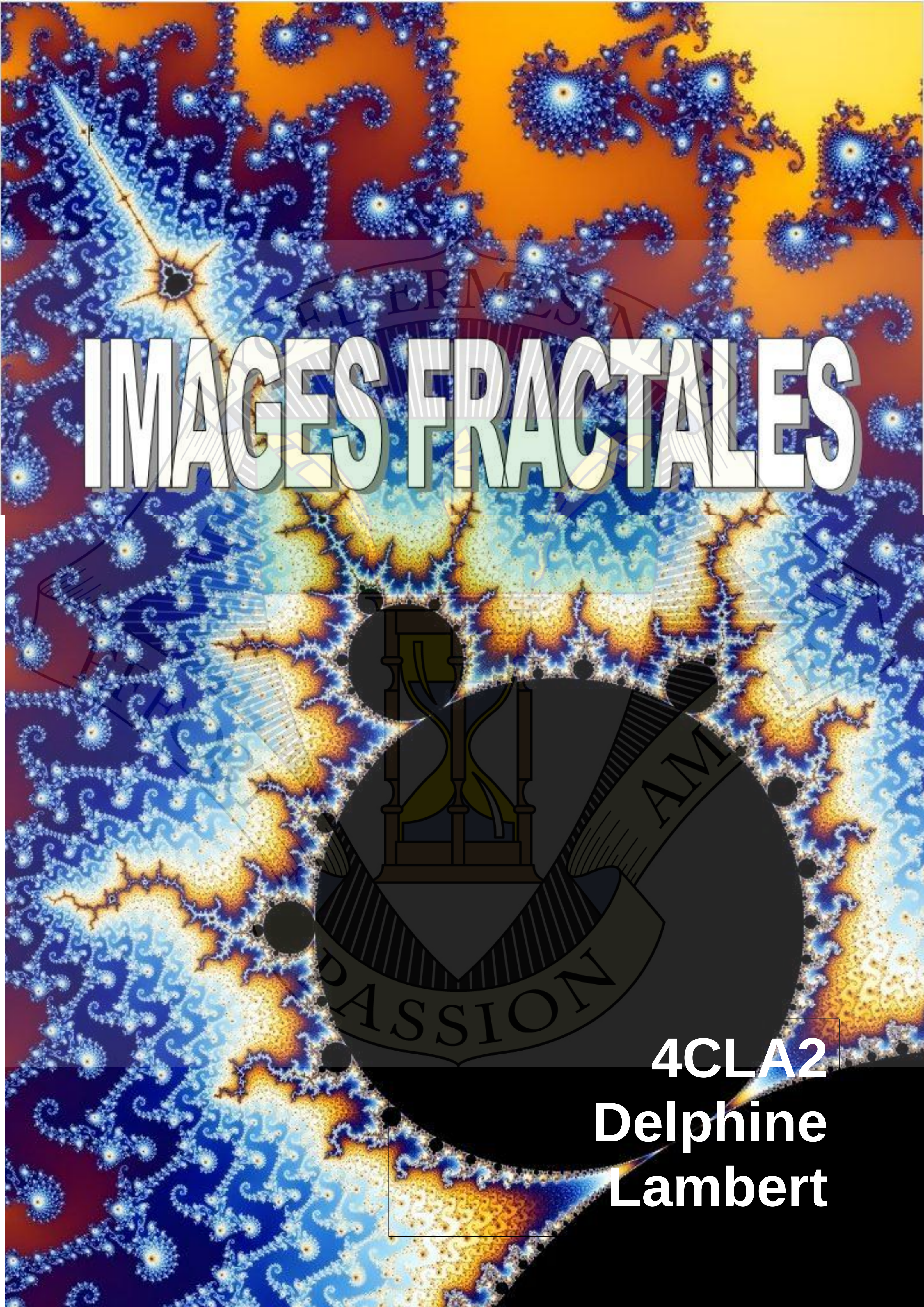
Les travaux personnels du Lycée Ermesinde Mersch

Images fractales

Lambert Delphine

Classe : 4CLA2
Tuteur : Sonia Almeida

Mai 2014



IMAGES FRACTALES

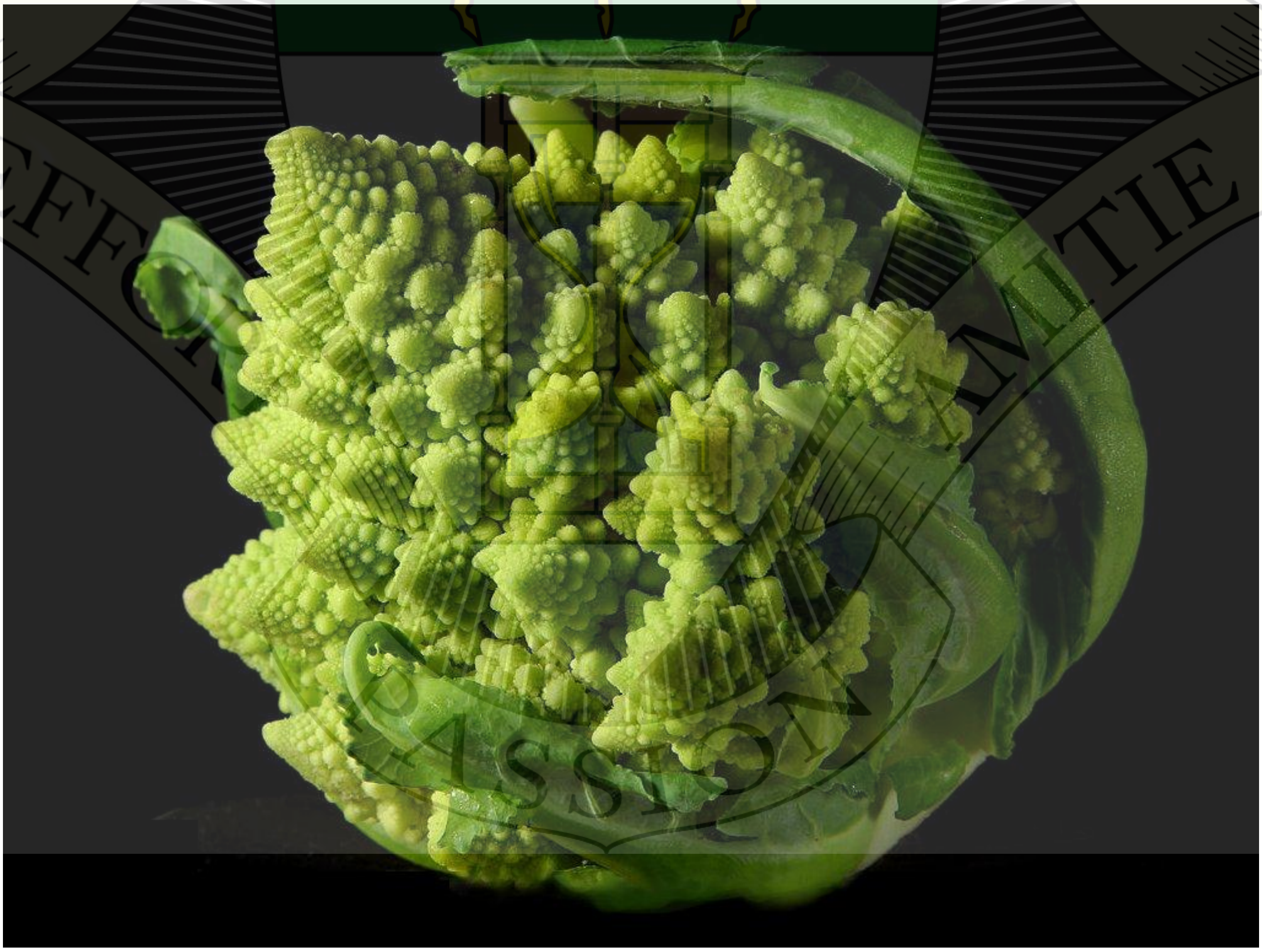
4CLA2
Delphine Lambert

Tables des Matières

1. Introduction

Je cherchais un sujet unissant les mathématiques et un côté artistique. Le sujet des images fractales m'a alors été suggéré et j'ai fait quelques recherches. En voyant ces images qui sont en partie créés à base de formules mathématiques[1], j'ai été troublée par leur infinité. C'est ainsi que j'ai défini mon sujet de recherche. De plus, certains objets fractals qui se trouvent dans la nature mon particulièrement intriquée, c'est pourquoi je leur ai dédié un chapitre[2].

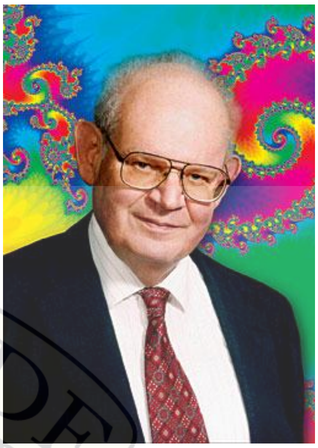
Je cherche au premier plan dans mon travail à comprendre ce que sont les fractals, également appelés « monstres mathématiques », même s'il me faudra acquérir certaines notions mathématiques qui me sont encore inconnues en ces moments. De plus, j'aimerai comprendre pourquoi elles sont présentes dans la nature et quel y est leur fonction.



[1] Voir chapitre 3. b)
[2] Voir chapitre 3. c)

2. La théorie des objets fractals

a. Étymologie



Benoît Mandelbrot
[http://www.babelio.com]

Le mot fractal trouve ses racines dans le mot latin *fractus*, qui signifie irrégulier ou encore brisé. Ce terme est un néologisme[3] créé en 1974 par Benoît Mandelbrot, le père de la théorie des fractales.

b. Origine

Le mathématicien et informaticien franco-américain Benoît Mandelbrot a créé le concept d'objets fractals en étudiant les soi-disant « monstres mathématiques ».
Il est né le 20 novembre 1924 à Varsovie en Pologne dans une famille juive. En 1936, sa famille émigra à Paris à cause de la menace hitlérienne. En France, Benoît retrouva son oncle Szolem Mandelbrojt, mathématicien. Szolem Mandelbrojt lui enseigna son savoir, notamment celui que lui avait enseigné son ancien professeur, le célèbre mathématicien Waclaw Sierpinski[4]. Puis la famille se réfugia près de Lyon. Benoît y poursuivit ses études et en 1944, il entra à l'école polytechnique. Il y suivit les cours de Paul Pierre Lévy[5] et de Gaston Julia[6], ces deux mathématiciens auront eu une grande influence sur sa vision des mathématiques. Attiré par la plus grande liberté de créativité de ce pays, Benoît part un an pour les USA. Puis il revint en France pour écrire une thèse sur le sujet : « Contribution à la théorie mathématique des communications », laquelle lui valut une grande reconnaissance.
En 1958, Benoît s'installa aux États-Unis et travailla au centre de recherche de l'IBM[7]. Ce fut alors qu'il commença à s'intéresser aux formes mathématiques étranges qui ont des similarités à de différentes échelles. En 1975, son livre « Les objets fractals - Forme, hasard et dimension » parut. En 1987, il quitta l'IBM pour devenir professeur à l'université de Yale, aux États-Unis. Il obtenu beaucoup de prix, ainsi que le prix Wolf et la médaille de Franklin.
Il décéda le 14 Octobre 2010 à Cambridge, au Massachusetts, aux États-Unis.

---

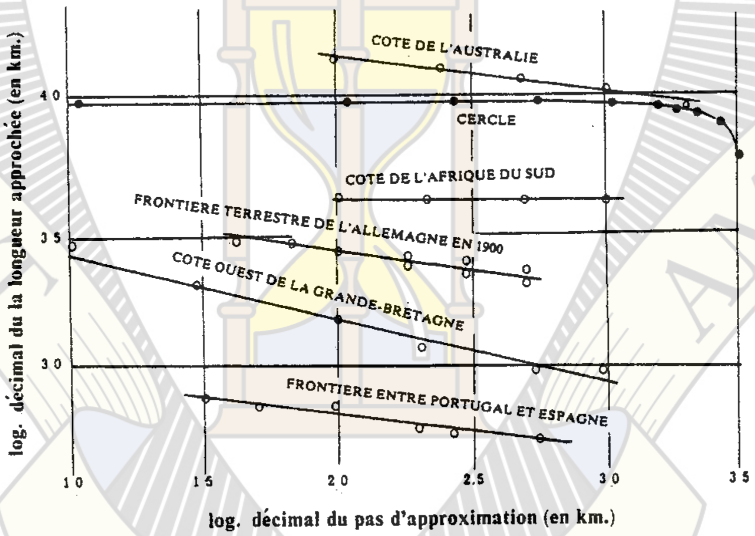
[3] Mot nouveau
[4] Voir « Triangle de Sierpinski » au chapitre 3
[5] Voir « Courbe de Lévy » au chapitre 3
[6] Voir « Ensemble de Julia » au chapitre 3
[7] « *International Business Machines Corporation* » voir glossaire

c. L'effet Richardson

Lewis Fry Richardson est un mathématicien anglais qui, en premier, a constaté que la mesure d'une côte dépend de la précision de la mesure. Cette constatation a été appelée « l'effet Richardson ».

Par exemple, la côte anglaise mesurerait 2.350 km en utilisant un étalon de mesure de 200 km, 2.775 km avec 100 km et 3.425 km avec 50 km :

Richardson a réalisé cet exercice avec d'autres côtes et frontières et a constaté que, dans certains cas, les résultats de ses mesures apparaissaient comme des droites dans un graphique à échelle bilogarithmique :



Cette constatation a permis à Richardson de conclure que, dans ces exemples, la longueur est proportionnelle à la précision de la mesure à un exposant constant :

$L(\eta)$ est proportionnel à η^{α}

$\Leftrightarrow L(\eta) = k \cdot \eta^{\alpha}$

où

- η est la précision de la mesure
- $L(\eta)$ est la longueur de la côte en fonction de η
- k est un facteur de proportionnalité
- α est une constante caractéristique de la côte/ frontière mesurée

d. Définitions et Propriétés

Il existe de plusieurs définitions des fractals, en voici quelques exemples :

« *Se dit d'objets mathématiques dont la création ou la forme ne trouve ses règles que dans l'irrégularité ou la fragmentation.* » citation du petit Larousse

« *Une figure fractale ou fractale, est une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles (...) impliquant une homothétie*[8] *interne.* » citation de fr.wikipedia.org

« *Une fractale désigne des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle.* » citation de www.futura-sciences.com

On peut résumer ces définitions comme suit : Une fractale est caractérisée par son *autosimilarité* ou encore appelé *homothétie d'échelle*. Ceci signifie qu'à différentes échelles, on peut retrouver un même motif et ce, en théorie, aussi loin que l'on puisse « zoomer ».

e. La Dimension en Géométrie Euclidienne

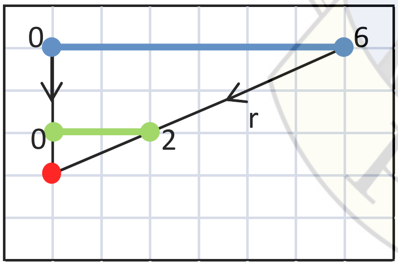
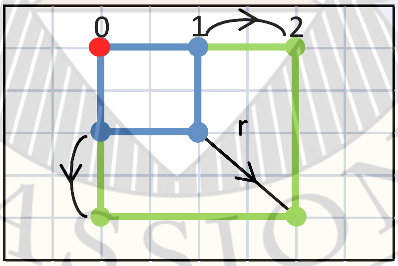
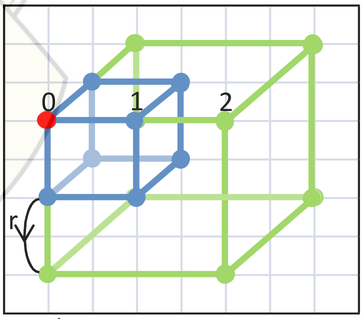
En géométrie euclidienne, un point a une dimension égale à 0, une courbe a une dimension égale à 1, une surface a une dimension égale à 2 et un cube a une dimension égale à 3. Une propriété de la dimension en géométrie euclidienne est que

$$N = r^d$$

où

- N étant le rapport de quantité,
- r le rapport d'homothétie et
- d la dimension.

Par exemple :

<table>
<tr>
<td>$d = 1$
$r = ⅓$

$N = r^d$
$= ⅓^1$
$= ⅓$</td>
<td>$d = 2$
$r = 2$

$N = r^d$
$= 2^2$
$= 4$</td>
<td>$d = 3$
$r = 2$

$N = r^d$
$= 2^3$
$= 8$</td>
</tr>
</table>

---

[8] Voir glossaire

La formule ci-dessus peut être transformée comme suit :

$$N = r^d$$
$$\Leftrightarrow \log N = \log r^d$$
$$\Leftrightarrow \log N = d \cdot \log r$$
$$\Leftrightarrow \ d = \frac{\log N}{\log r}$$

Cette formule[9] ressemble à celle utilisée par Mandelbrot pour calculer la dimension de Hausdorff-Besicovitch des fractales.

Afin de démontrer que « la dimension physique (...) est affaire de degré de résolution », c'est-à-dire que la mesure dépend de sa précision, Mandelbrot a cité l'anecdote de la pelote de laine :
La dimension peut être variable, elle dépend du degré de résolution avec lequel on observe l'objet. Prenons l'exemple d'une pelote de laine de 10 cm de diamètre, faite de fils de 1 mm de diamètre :

– Avec un degré de résolution de 10m, la pelote nous apparaît comme un point, c'est-à-dire qu'elle présente une dimension 0 ;
– Avec un degré de résolution de 10cm, nous commençons à la voir comme une boule, donc de dimension 3 ;
– Avec un degré de résolution de 1mm, c'est un ensemble de fils, de dimension 1 ;
– Avec un degré de résolution de 0,1mm, chaque fil devient une sorte de colonne, donc tridimensionnel ;
– Avec un degré de résolution de 0,01 mm, nous apercevons un ensemble de fibres de laine, et tout redevient unidimensionnel ;
– Avec un degré de résolution de 1µm, les fibres apparaissent comme des colonnes tridimensionnelles ;

Si on pouvait encore augmenter le degré de résolution, on pourrait voir les atomes des fibres comme des points unidimensionnels, puis comme des boules tridimensionnelles.

[9] Pour log voir glossaire

f. La dimension de Hausdorff-Besicovitch

Félix Hausdorff
[http://en.wikipedia.org

Le mathématicien Félix Hausdorff (1868-1942) a initié en 1918 une théorie, développée par Besicovitch, généralisant la notion de dimension euclidienne. Appliquée à certains objets mathématiques connus à l'époque (ensemble de Cantor...), cette théorie a permis de calculer une valeur de cette *dimension de Hausdorff-Besicovitch*, pouvant apparaître comme non entière.

Mandelbrot a utilisé cette dimension de Hausdorff-Besicovitch pour caractériser les fractales :

$$\delta = -\frac{\log N}{\log r}$$

où

- N est le rapport de quantité,
- r le rapport d'homothétie interne (supérieur à 1).

Attention : ici, le rapport d'homothétie interne est par définition supérieur à 1, ce qui nous permet de découvrir un nouveau détail de la fractale.

En pratique, cette dimension mesure le degré d'irrégularité et de brisure de la figure, respectivement le degré de remplissage de la dimension supérieure.

Par exemple, une figure dont la dimension se situerait entre 1 et 2 devrait être plus effilée qu'une surface tout en étant plus massive qu'une ligne.

3. Exemples

Il existe deux sortes de fractales fondamentalement différentes, ce sont les courbes fractales et les fractales déterministes.

a. Fractals géométriques

Ces fractales se forment par construction géométrique, à partir d'un *initiateur*, dont chaque segment/ face est substitué(e) par un *générateur*. Cette substitution est répétée en théorie infiniment ; on parle donc d'*itérations*.

Les fractals géométriques présentés ci-dessous sont classés par ordre croissant de leur dimension.

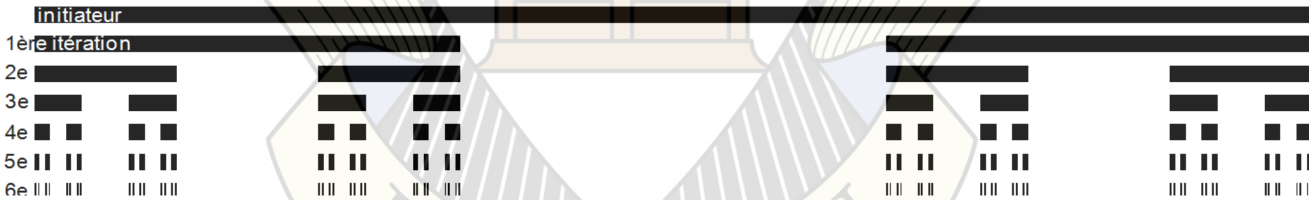
$\delta < 1$

<u>Ensemble de Cantor</u>

L'ensemble de Cantor a été inventé par le mathématicien allemand Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor (1845-1918), le créateur de la théorie des ensembles. L'ensemble de Cantor s'avérera être la première fractale, malgré que ce terme ne soit apparu qu'un siècle plus tard. Pour obtenir l'ensemble de Cantor, le segment initiateur est subdivisé en trois parts égales, le générateur est d'enlever le tiers central.

Initiateur Générateur

Voici à quoi ressemble l'ensemble de Cantor après 6 itérations :



L'ensemble de Cantor tend vers un ensemble de points infiniment petits, appelés *poussières de Cantor*. La dimension de Hausdorff-Besicovitch de cet ensemble fractal vaut :

$$\delta = \frac{\log N}{\log r}$$

où
- $r = 3$
- $N = 2$

car pour la première itération, on a « zoomé » 3 fois pour découvrir que l'initiateur s'y retrouve 2 fois.

$$\delta = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}630929754$$

$1 \leq \delta < 2$

Courbe de Von Koch

Inventée en 1906 par le mathématicien suédois Helge Von Koch (1870-1924), également bien avant l'invention du mot fractale.

L'initiateur est un segment subdivisé en tiers, le générateur est qu'il faut remplacer le tiers central du segment par un triangle équilatéral ayant comme base le segment central.

Initiateur Générateur

1ère itération 2e itération 3e itération 4e itération 5e itération

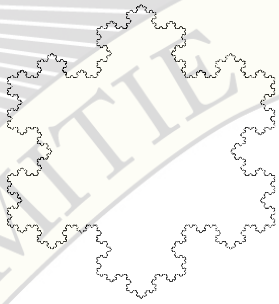
La dimension de Hausdorff-Besicovitch de cet ensemble fractal vaut :

$$\delta = \frac{\log N}{\log r}$$

où
- $N = 4$
- $r = 3$

car pour la première itération, on a zoomé 3 fois pour découvrir que l'initiateur se retrouve 4 fois.

$$\Rightarrow \delta = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618595$$



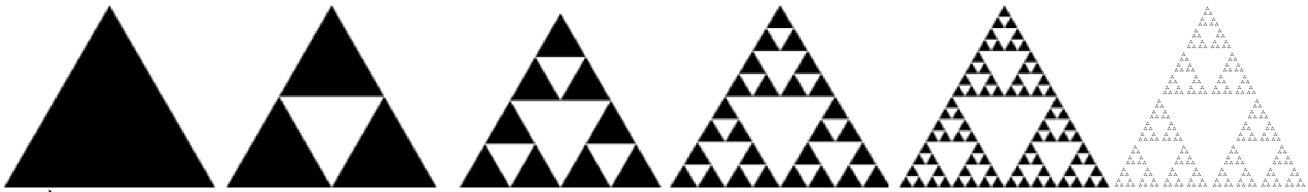
Quand l'initiateur est un triangle équilatéral, on obtient le flocon de Von Koch. Cette image est une des fractales géométriques les plus connues.

Triangle de Sierpinski

Le triangle de Sierpinski a été créé par Waclaw Sierpinski (1882-1969). Waclaw Sierpinski ayant été un des professeurs de Szolem Mandelbrojt, il a beaucoup influencé la vision des mathématiques de Benoît Mandelbrot.

Cette image fractale est construite à partir d'un triangle équilatéral, lequel est divisé en quatre plus petits triangles congruents, puis auquel on retire le triangle central. Ensuite, on recommence l'opération avec chacun des triangles ainsi obtenus. Le périmètre est constant et après une infinité d'itérations, l'aire devient nulle.

Initiateur Générateur



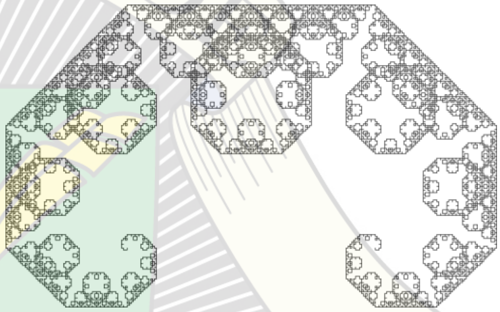
1ère itération 2e 3e 4e 5e 6e

Sa dimension fractale est de :

$$\delta = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}5849$$

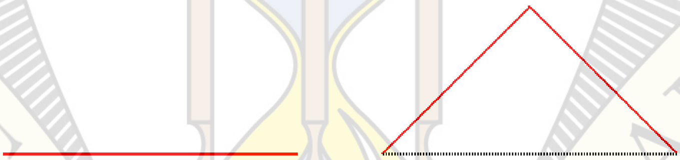
δ = 2

Courbe de Lévy



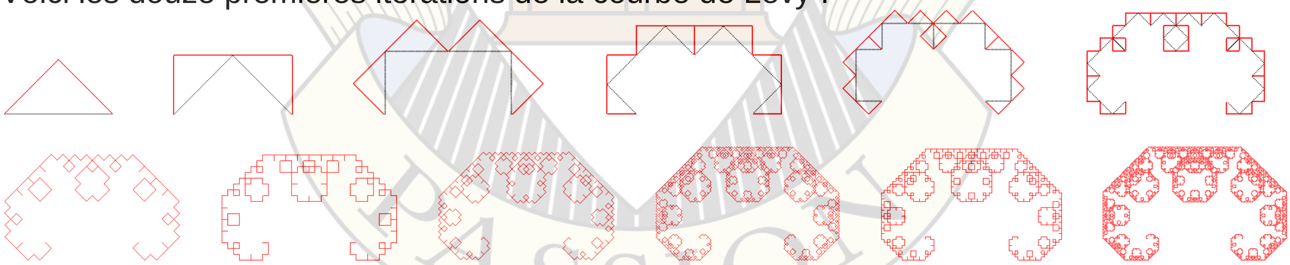
La courbe de Lévy a été décrite une fois en 1906 par Ernesto Cesàro et une fois en 1910 par Georg Farber. Aujourd'hui, elle porte le nom du mathématicien français Paul Pierre Lévy (1886-1971) qui a été en 1938 le premier à décrire l'autosimilarité de certaines formes géométriques. Lévy a aussi eu Benoît Mandelbrot comme élève.

La courbe de Lévy est aussi appelée courbe en C ou encore courbe du crabe. Elle est construite à base d'un segment d'une droite, qui est transformé en un triangle rectangle, dont l'hypoténuse possède la même longueur que le segment du départ, puis celle-ci est effacée.



Initiateur Générateur

Voici les douze premières itérations de la courbe de Lévy :



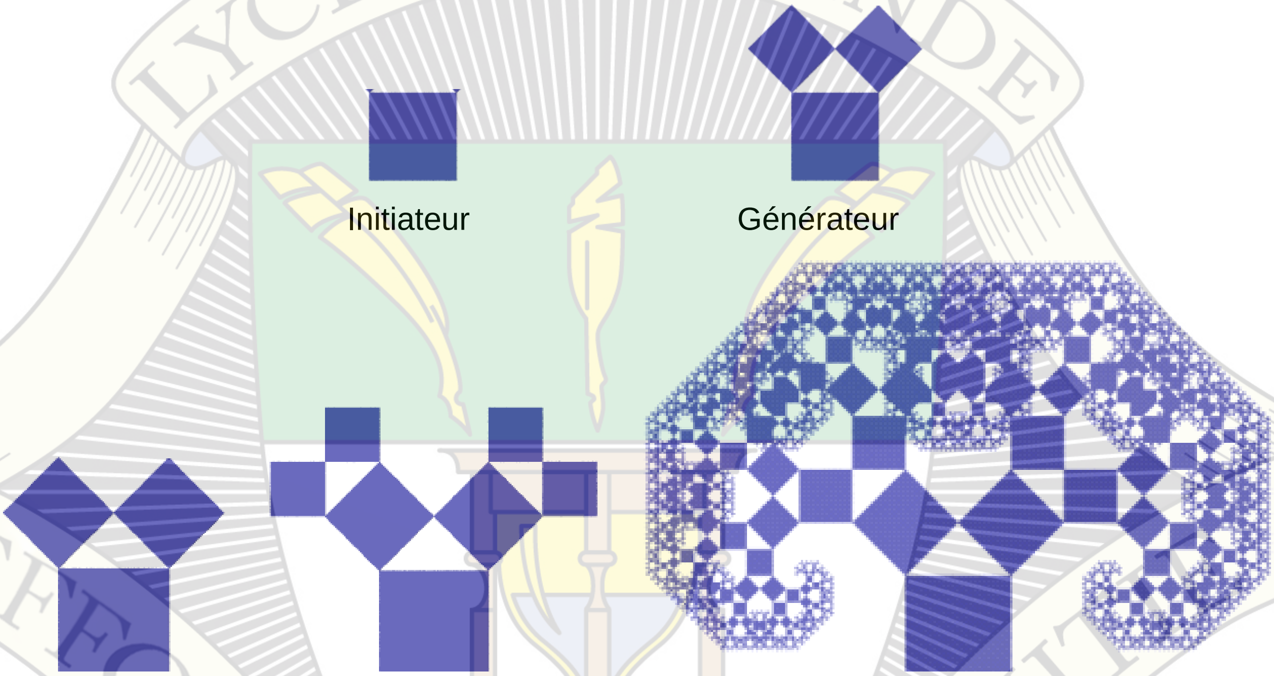
Sa dimension fractale est de :

$$\delta = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log 2}{\log(2^{\frac{1}{2}})} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2}\log 2} = 2\frac{\log 2}{\log 2} = 2$$

La valeur de cette dimension laisse penser que cette fractale recouvre complètement la surface. Or, on voit bien que ce n'est pas le cas. L'explication en est que cette courbe se superpose par endroits, ce qui compense les « trous » que l'on voit.

Arbre de Pythagore

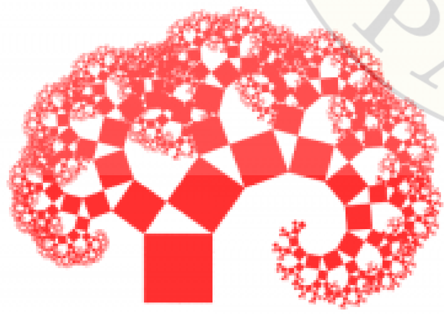
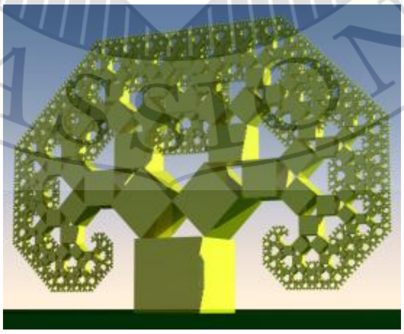
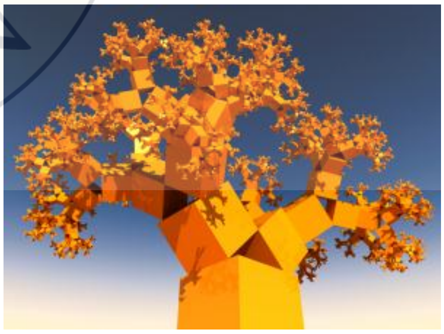
L’arbre de Pythagore se compose tout d’abord à partir d’un triangle rectangle isocèle dont le carré de chaque côté est tracé. Un même triangle dont le carré de l’hypoténuse est identique à chacun des petits carrés y est rajouté. Et après douze itérations, notre figure ressemble alors à un arbre. Cette image fractale a comme particularité, qu’à chaque itération, l’aire de l’arbre augmente de l’aire du carré initial d’après le théorème de Pythagore ($\alpha^2 + b^2 = c^2$). Aussi, l’arbre ne sort pas d’un certain disque, même après une infinité d’itérations.



Sa dimension fractale est de :

$$\delta = \frac{\log(1/2)}{\log(\sqrt{2}/2)} = 2$$

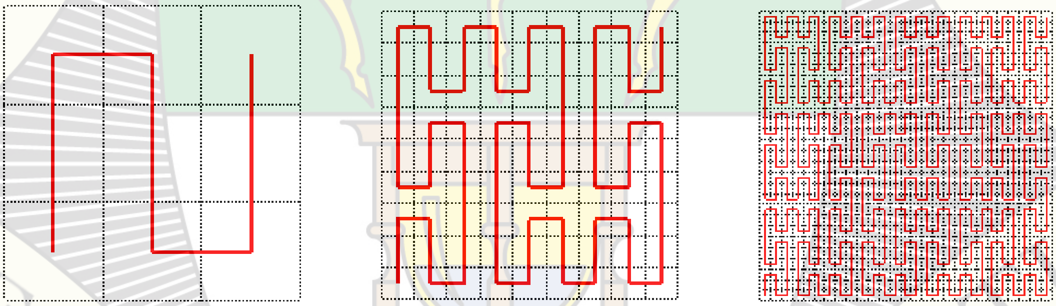
Il existe des variantes de l’arbre de Pythagore : on peut partir d’un triangle rectangle non-isocèle, ou on peut le faire avec une dimension 3 et le en tournant à chaque itération de 90° :

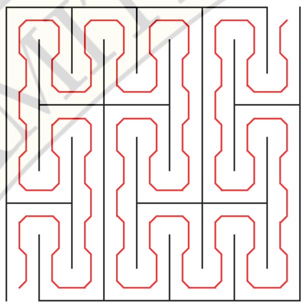
Courbe de Peano

Cette courbe est dédiée au mathématicien italien Guiseppe Peano (1858-1932), il fut le premier à décrire une courbe qui peut remplir le plan. Cette courbe ayant été la première à remplir le plan, le terme de « courbe de Peano » est aujourd'hui utilisé pour désigner l'ensemble de courbes remplissant le plan.

L'initiateur est un carré, qui est remplacé par neuf sous-carrés. Ces neuf sous-carrés sont reliés dans un certain ordre, on part d'un coin et termine par le coin opposé, ici, on commence par le coin en bas à gauche et on ressort donc par le coin en haut à droite. Pour visualisé la succession des petits carrés, on trace une ligne (ici en rouge) passant par leur centre, ne pouvant être que horizontale ou verticale (pas diagonale). Ce chemin est toujours le même. Puis chaque petit carré est redivisé en neuf sous-carrés. Une ligne passant par leur centre trace à nouveau l'ordre par lequel ils sont reliés. Cette fractale a une dimension 2 car elle est composée d'une infinité de petits carrés qui remplissent exactement la surface.

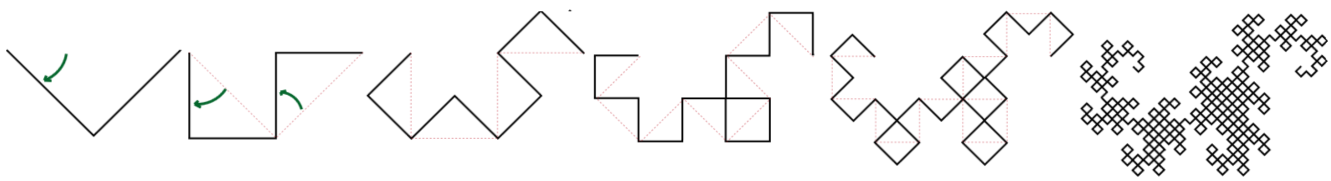


Une variante ludique de cette courbe est le labyrinthe de Peano, qui consiste à tracer tous les côtés des carrés qui ne sont pas traversés par la courbe rouge. Cette dernière représente donc le chemin de sortie du labyrinthe.



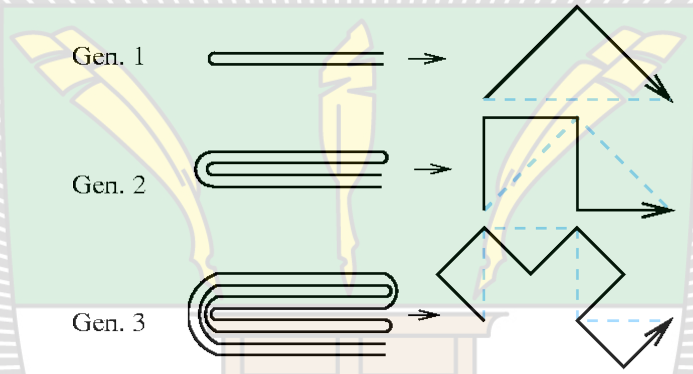
Courbe du Dragon

L'initiateur est une droite pour laquelle on considère un début et une fin ; on lui attribue donc un sens. Le générateur est constitué de deux petits côtés d'un triangle rectangle isocèle, dont l'hypoténuse est l'initiateur. À chaque étape de la substitution, on alterne le positionnement du générateur par rapport au sens de l'initiateur, par exemple en commençant toujours à gauche puis en alternant à droite, à gauche, à droite, ...



Par la suite, l'itération n est composée de 2 fois l'itération n-1. Cette courbe peut paver le plan, elle a donc une dimension 2. Elle « s'emboite » parfaitement de plusieurs manières :

La courbe du dragon peut aussi être reproduite à partir d'une simple feuille de papier. Il suffit de plier cette feuille toujours en deux parties identiques et dans toujours dans le même sens.



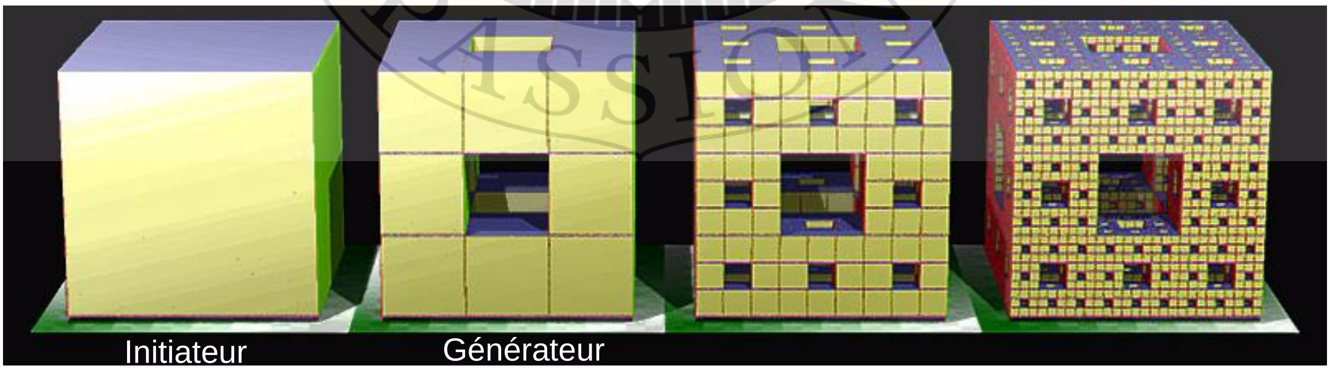
$2 < \delta < 3$

<u>Éponge de Menger</u>

L'éponge de Menger a été créé par le mathématicien autrichien Karl Menger (1902-1985) d'après le même système que le tapis de Sierpinski, c'est pourquoi cette image est aussi appelée l'éponge de Menger-Sierpinski.

Le cube est divisé en 9 plus petits cubes de tailles égales. Le cube central ainsi que le cube central de chacun des côtés sont retirés. Puis chaque nouveau cube est redivisé en 9 plus petits cubes de tailles égales et ainsi de suite jusqu'à obtenir une éponge.

Sa dimension fractale est de : $\delta = \frac{\log(20)}{\log(3)} = 2{,}726833028$



b. Les Ensembles Fractales Déterministes

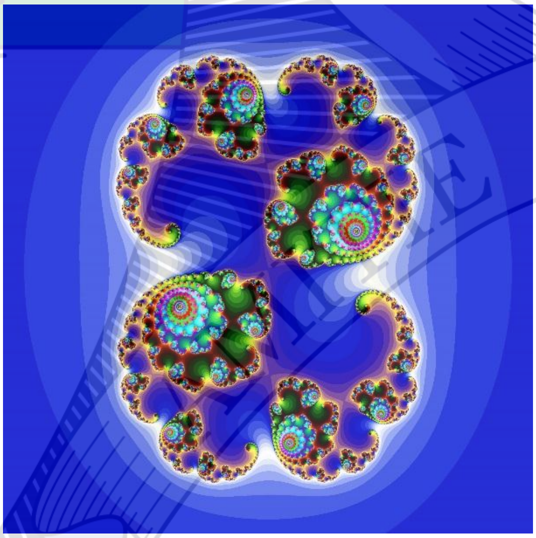
Les fractales déterministes sont obtenues par calculs itératifs. Pour rappel, les précédentes l'étaient par construction géométrique.

Pour construire une fractale déterministe dans un plan, on définit une fonction itérative appliquée à ses points de coordonnée[10] $(x\,;\,y)$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1\,(x_n; y_n) \\ y_{n+1} = f_2\,(x_n; y_n) \end{cases}$$

Lorsque les coordonnées obtenues, après de nombreuses itérations, tendent vers l'infini, on dit qu'elles divergent ; la coordonnée initiale est rejetée et n'appartient donc pas à l'ensemble fractal. Par contre, si les coordonnées $(x\,;\,y)$ restent bornées, ou mieux convergent, cette coordonnée est retenue pour appartenir à l'ensemble fractal et en constituer un point supplémentaire.

À la base, la figure fractale est constituée d'un ensemble de points blancs ou noirs, un point accepté (dont la série d'itération converge) est colorié en noir et un point rejeté (dont la série d'itérations diverge) est marqué en blanc. Pour amener un peu de couleur, on peut attribuer un code couleur en fonction du degré de divergence, donc si la coordonnée diverge rapidement, elle aura une autre couleur qu'une coordonnée qui diverge plus tard.



Pour dessiner en détail un tel ensemble fractal, il faut donc « tester » un grand nombre de points et calculer pour chaque point un grand nombre d'itérations. La réalisation graphique d'une telle figure nécessite de grandes ressources de calcul par ordinateur. Ce n'est donc pas un hasard si ces ensembles fractals n'ont qu'être analysé que récemment.

Si une des inconnues de l'équation est fixée (x ou y), on obtient une autre figure, à base d'un même calcul. (Voir schéma sur la page suivante)

[10] Voir glossaire

Ensemble de Mandelbrot

La théorie de l'ensemble de Mandelbrot avait déjà été inventée au début du XXe siècle par Gaston Julia et par Pierre Fatou, tandis que ses premières représentations graphiques calculées par ordinateur n’ont été obtenues qu’en 1980 par Benoît Mandelbrot et par Thomas J. Watson.

Pour cet ensemble fractal, la fonction itérative est :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot y_n + b \end{cases}$$

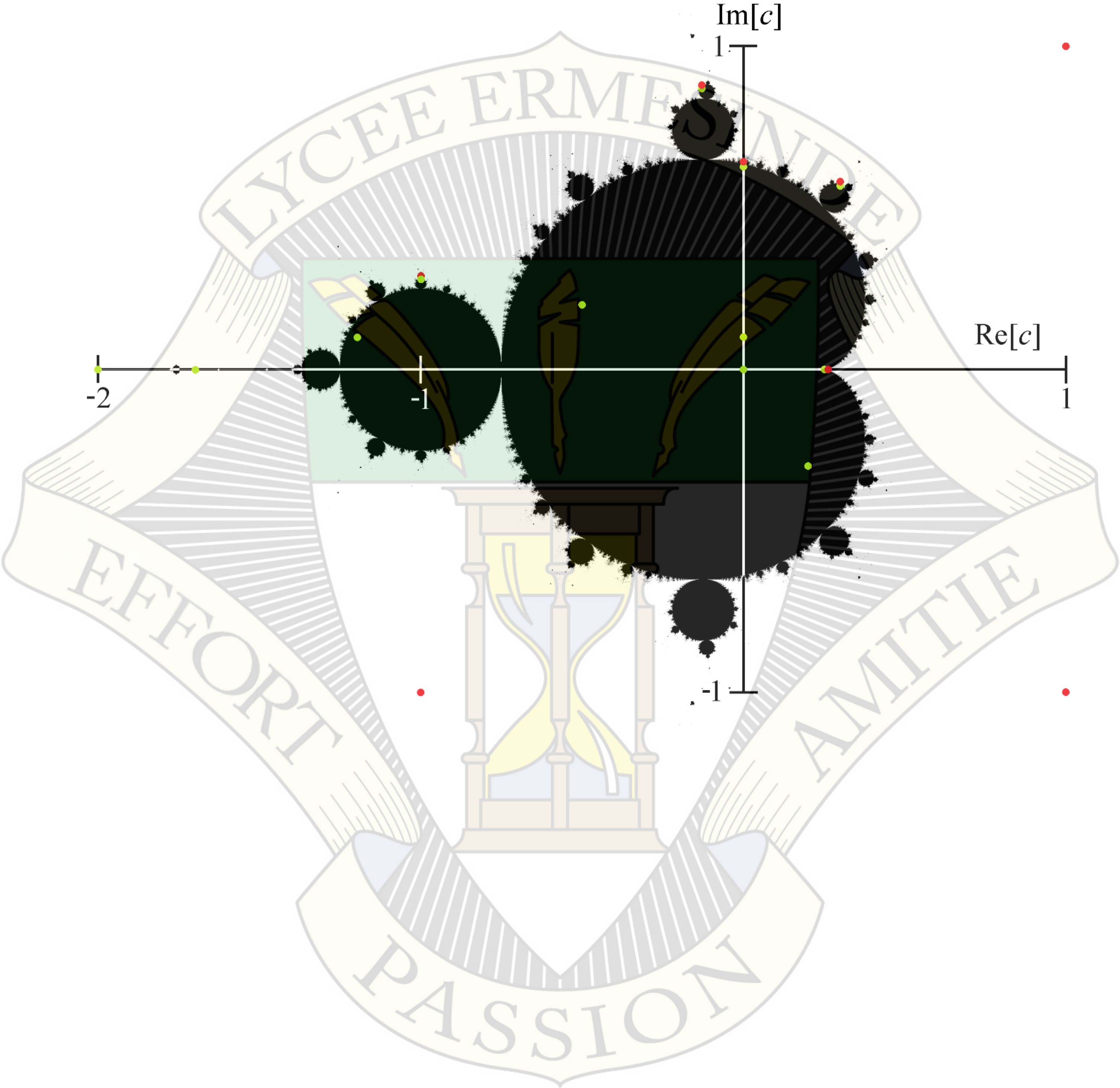
et l’on commence chaque itération avec :

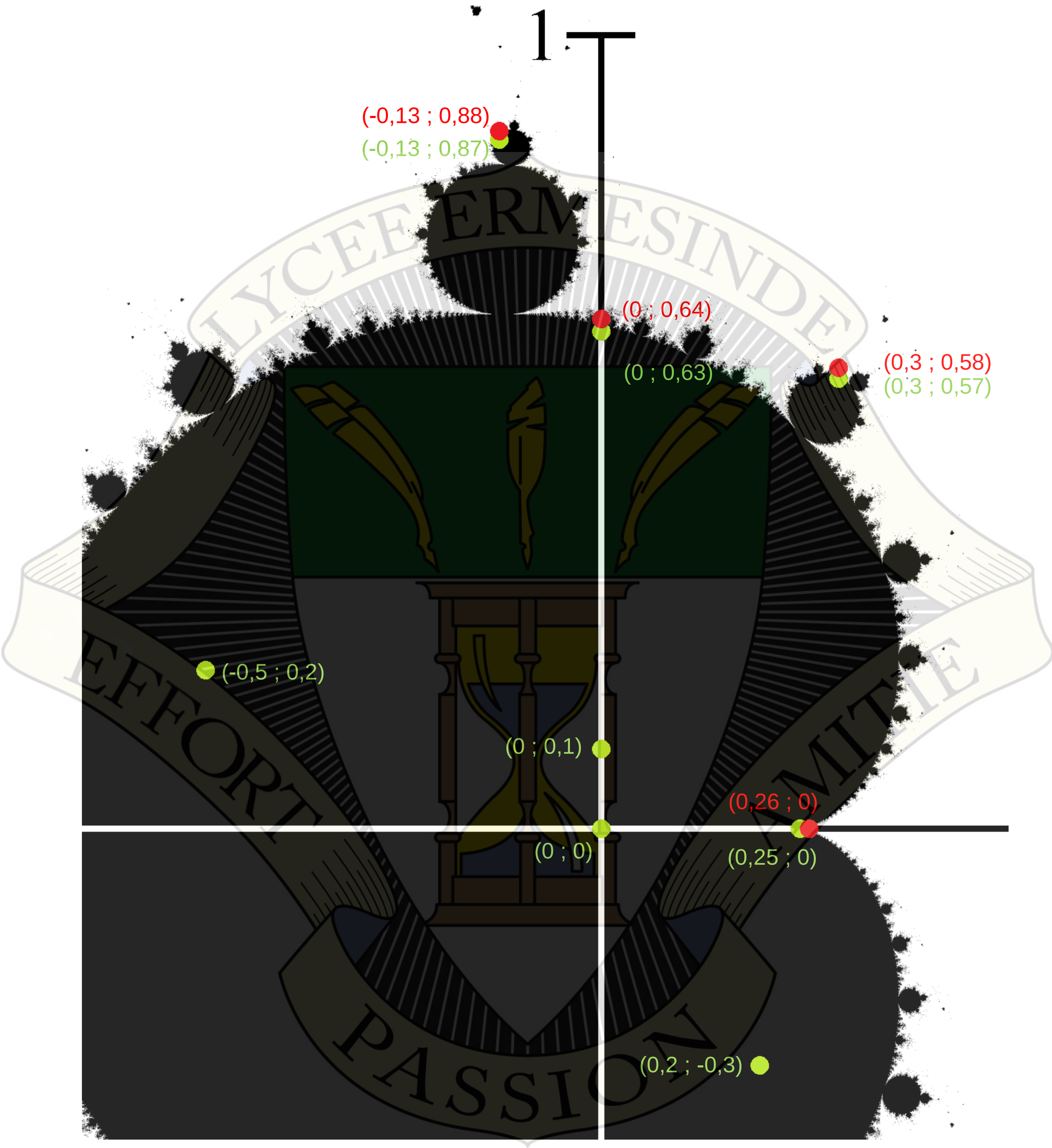
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

et avec une coordonnée $c\ (a; b)$ qui est testée dans cette fonction itérative.

Si après de nombreuses itérations, x et y restent bornés ou convergent, alors $c\ (a; b)$ est accepté et constitue donc un point de la figure fractale. Si, au contraire, x ou y tend vers l’infini, divergent, alors $c\ (a; b)$ est rejeté. Les points acceptés sont marqués en noir. Les points rejetés sont coloriés en fonction de leur degré de convergence, donc en fonction de s’ils tendent plus ou moins rapidement vers l’infini.

En annexe se trouve une première feuille de calcul Excel où j’ai simulé une série d’itérations pour différents points $c\ (a; b)$ de l’ensemble de Mandelbrot. Je me suis limitée à la 1000ème itération. Les colonnes représentent le nombre d’itérations, tandis que chaque paire de lignes représentent une coordonnée composée d’un x et d’un y. Si après un certain nombre d’itérations les coordonnées divergent, elles sont marquées en rouge, mais si elles restent bornées ou convergent à la 1000e itération, elles sont marquées en vert. On remarque que certaines coordonnées divergent très rapidement, par exemple déjà à la 20ième itération, et que d’autres coordonnées ne divergent que beaucoup plus tard.

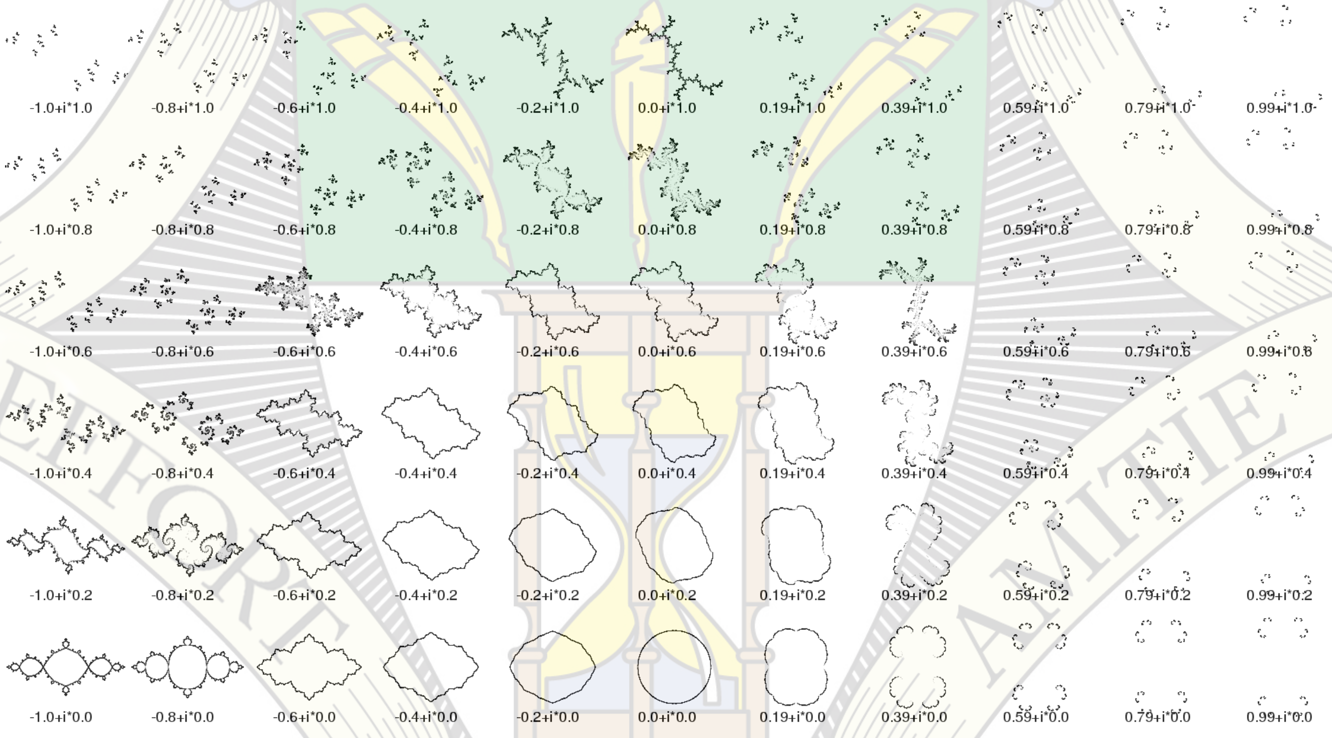

Im[c]
1
Re[c]
-2
-1
1
-1
LYCEE ERMESINDE
EFFORT
AMITIE
PASSION


1
(-0,13 ; 0,88)
(-0,13 ; 0,87)
(0 ; 0,64)
(0 ; 0,63)
(0,3 ; 0,58)
(0,3 ; 0,57)
(-0,5 ; 0,2)
(0 ; 0,1)
(0,26 ; 0)
(0 ; 0)
(0,25 ; 0)
(0,2 ; -0,3)
LYCEE ERMESINDE
EFFORT
AMITIE
PASSION

Ensembles de Julia

L'ensemble de Mandelbrot est un cas particulier des ensembles de Julia. Les deux ensembles sont obtenus à base d'un même système de deux équations. Néanmoins, pour obtenir l'ensemble de Mandelbrot, chaque point $(a ; b)$ est testé et porté dans un plan cartésien d'axes a et b, avec x_0 et y_0 fixés à 0. Au contraire, pour obtenir l'ensemble de Julia, chaque point $(x ; y)$ est testé et porté dans un plan cartésien d'axes x et y, avec a et b constants.

Pour chaque nombre donné à a et b, l'on obtient de différentes images :

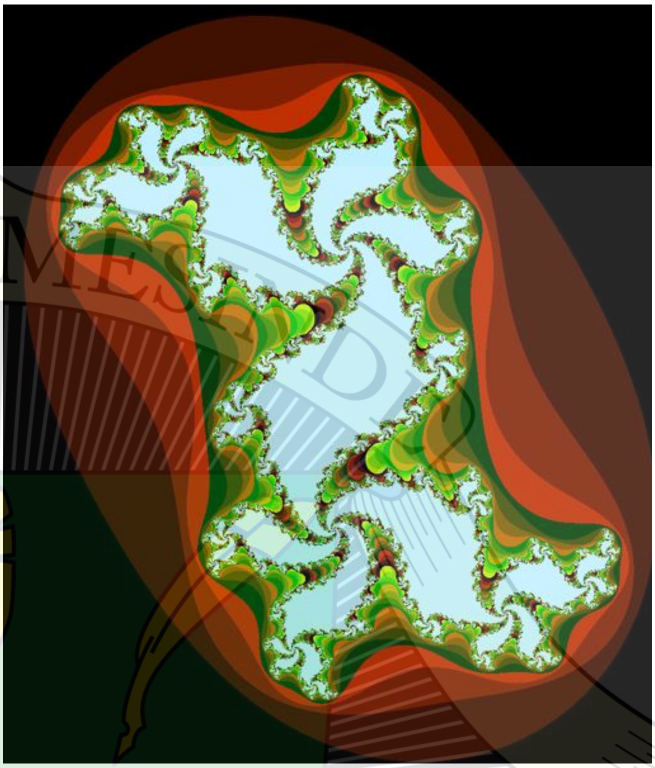


Quelques ensembles de Julia

En annexe se trouve deux autres feuilles Excel où j'ai calculé quelques points de deux ensemble de Julia.

Le premier correspond à
$a = 0{,}3$ et $b = 0{,}5$.

Il présente une surface importante (dans la figure, en blanc) et j'ai donc pu trouver quelques points qui ne divergent pas à la millième itération (en vert dans la feuille Excel).

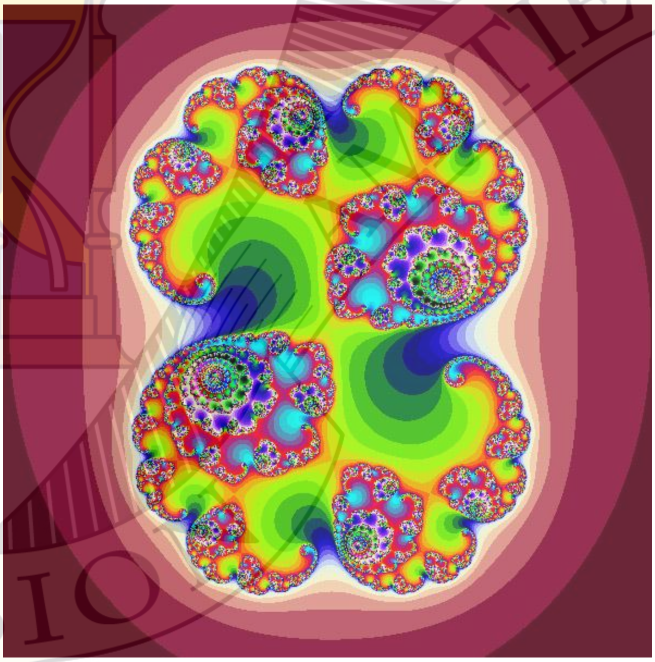


Julia (a= 0,3 ; b=0,5)

[http://commons.wikimedia.org]

Le second correspond à
$a = 0{,}285$ et $b = 0{,}01$

Cet ensemble de Julia est par contre composé d'une multitude de points sans grande surface.
Je n'ai donc réussi qu'à trouver des points qui ne divergent qu'après la centième itération (en orange dans la feuille Excel).



Julia (a= 0,285 ; b=0,01)

[http://commons.wikimedia.org]

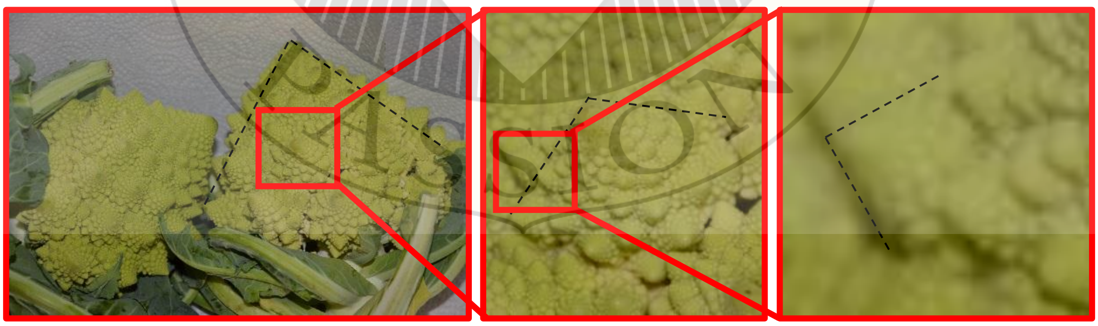
c. Fractals Naturels

Dans la nature, l'on peut observer une multitude de phénomènes de construction fractale, comme par exemple les montagnes, les nuages, la forme des arbres et des coraux, la constitution de l'intestin grêle, le système sanguin, et de nombreux autres. J'en ai sorti quelques exemples qui m'ont particulièrement fasciné et où j'ai cherché une explication à ces formations assez particulières.

Chou romanesque

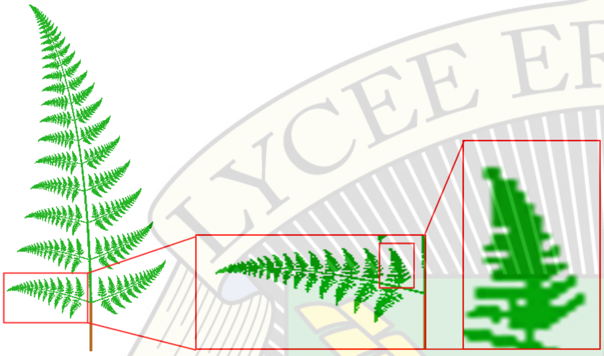
Le chou romanesque est l'un des plus beaux et inexplicables phénomènes naturels. Mais attention, inexplicable ne veut pas dire incalculable. Le chou romanesque est probablement l'objet naturel permettant le mieux d'introduire la notion de fractal, car celui-ci est formé de plusieurs parties semblables à l'ensemble. Il est formé à base d'un cône sur lequel se trouvent d'autres cônes plus petits qui se juxtaposent de manière enroulée en spirale sur lesquels se trouvent à nouveau des cônes et ainsi de suite. Il s'agit donc ici aussi d'une homothétie interne. Le chou romanesque a une formation très semblable au flocon de Koch mais en trois dimensions. La dimension fractale de la surface du chou doit être comprise entre 2 et 3.

Cette constitution permet à la plante de faire une plus grande quantité de photosynthèse puisque ainsi elle a une plus grande surface.



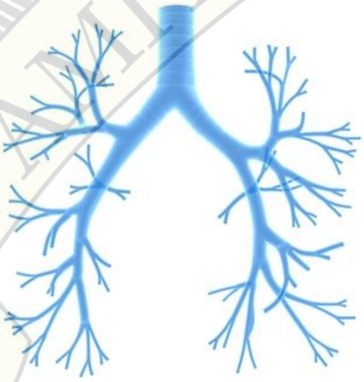
Fougère

La Fougère contient une homothétie interne, c'est pourquoi elle peut être qualifiée d'image fractale, quand elle est idéalisée. En effet, on retrouve le même motif, peu importe où l'on regarde/ zoome.

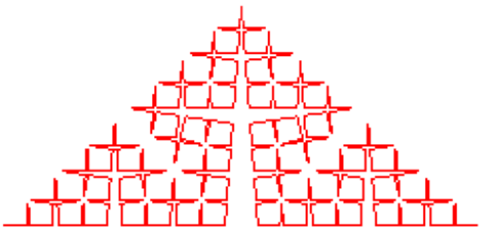


Mais il est également possible de construire une fougère à base de plusieurs répliques d'une tige qui se réitèrent comme sur la suite d'images ci-dessous.

Structure du poumon



Ici aussi, on ne peut parler de fractale parfaite, mais l'on parle à nouveau d'autosimilarité et d'homothétie interne. Les bronches se présentent sous une structure similaire à celle des arbres : sur chaque « tronc » poussent d'autres troncs plus petits sur lesquels se trouvent à nouveau des troncs encore plus petits. Comme l'image est répétitive, l'on peut parler d'un phénomène d'homothétie interne et donc d'une fractale. Cette configuration est favorable à la fonction des poumons, c'est-à-dire d'obtenir une surface maximale disponible à l'échange gazeux dans un volume minimale de la cage thoracique.



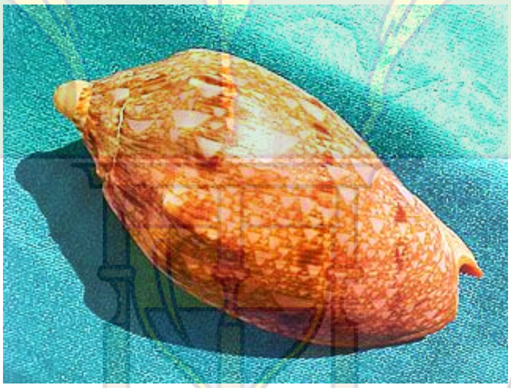
Cette constitution est similaire à l'un des dérivés du flocon de Koch.

4. Conclusion

La découverte de ce monde de fractales était très passionnante, car je ne savais au départ pas du tout à quoi j'allai aboutir. J'ai dû acquérir de nouvelles connaissances en mathématique afin de comprendre certaines notions de base.

J'ai également bien aimé ce sujet, car c'était ma première recherche sur un sujet qui est encore peu connu, pouvant être infiniment complexe et pas encore complètement découvert et compris, comme par exemple le motif de ce coquillage ci-dessous.

De plus, le fait qu'on retrouve des fractales dans la nature m'a beaucoup surprise et intéressée.

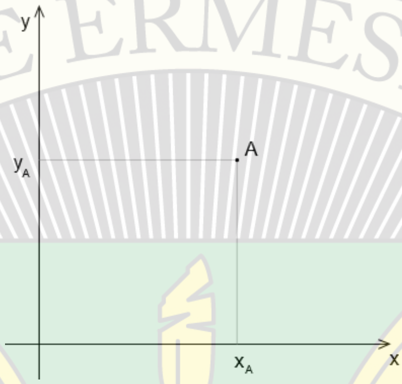


http://www.apprendre-en-ligne.net

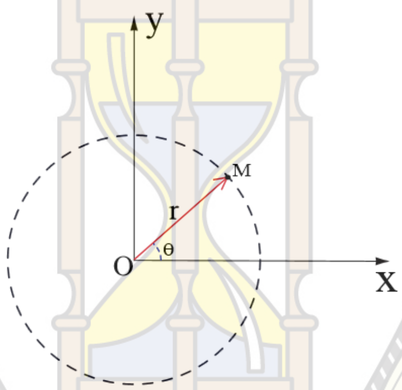
J'aimerai remercier Mr Thill et Mr Kreins pour les bons conseils et l'aide qu'ils m'ont fourni, ainsi que mon père pour tout le temps qu'il a passé à m'expliquer et à corriger mon travail.

5. Glossaire

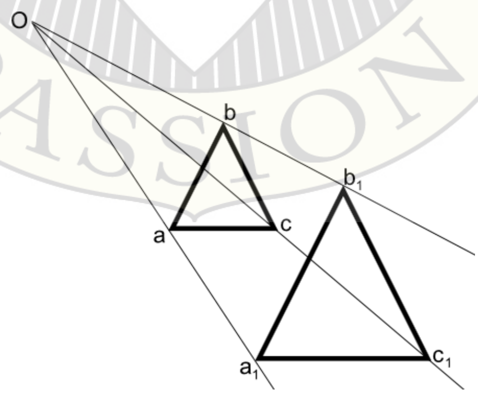
Coordonnées cartésiennes = ensemble de nombres situant un point dans une surface, respectivement dans un espace à l'aide d'un système d'axes cartésiens.



Coordonnées polaires = ensemble de nombres situant un point dans une surface, respectivement dans un espace à l'aide d'un système d'axes polaires.



Homothétie = en géométrie classique, transformation impliquant un centre et un rapport d'homothétie.



IBM = « *International Business Machines Corporation* est une société multinationale américaine, présente dans les domaines du matériel informatique, du logiciel et des services informatiques. » Citation de Wikipédia

Log = symbole de la fonction « logarithme » qui est l'inverse de la fonction exponentielle.
Par exemple :
$\log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3$

6. Sources

Livres

1. Dubois et Chaline : Le monde des fractales, La géométrie cachée de la nature, éd. Ellipses 2006
2. Mandelbrot Benoît : Les objets fractals, Forme, hasard et dimension, éd. Champs-Sciences 2010
3. Tricot Claude : Géométries et mesures fractales : une introduction, éd. ellipses 2008

Sites Internet et documents issus de l'internet

4. http://aesculier.fr
5. http://cnrs.fr
6. http://fractales.sectionpc.info/
7. http://free.fr
8. http://fr.wikipedia.org
9. http://icosaweb.ac-reunion.fr
10. http://images.math.cnrs.fr
11. http://itia.ntua.gr
12. http://mathsetcalculs.perso.neuf.fr
13. http://tpe-fractales.over-blog.net
14. http://www.babelio.com
15. http://www.bibmath.net
16. http://www.cegep-ste-foy.qc.ca
17. http://www.ensembles-de-julia.fr
18. http://www.futura-sciences.com
19. http://www.jean-claude-chirollet.fr
20. http://www.jussieu.fr
21. http://www.mathcurve.com
22. http://www.matierevolution.fr
23. http://www.polytechnique.fr
24. http://www.recreomath.qc.ca
25. http://www.univ-provence.fr

Autres

26. Messineo Florence : Les fractales, cahier d'exercices, éd. ellipses 2010

J'ai également rajouté de nombreux schémas et photos que j'ai faits moi-même.